Über die zu einem gegebenen linearen Komplex gehörigen kubischen Raumkurven

(kubische Nullkurven eines Nullraums).

Inaugural-Dissertation

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Kaiser Wilhelms-Universität zu Straßburg

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Ludwig Schmitt

aus Frankenthal (Rheinpfalz).

ACAD. LOCH. BAT. BIBL.

Leipzig

Druck von August Hoffmann

Spezialdruckerei für Dissertationen

1913

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552721_0150

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 7

Kapitel I: Untersuchung der Zahl der kubischen Nullkurven, die durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Nullgeraden berühren 8

§ 1. Definitionen und der Fundamentalsatz von Staudt . . 8

§ 2. Die Zahl und Lage der kubischen Nullkurven durch 3, 2 oder 1 Punkt 11

§ 3. Bestimmung von kubischen Nullkurven durch andere Elemente 16

Kapitel II: Die kubischen Nullkurven in ihren Beziehungen zu Flächen 2. Grades 19

§ 4. Verteilung der kubischen Nullkurven auf Kegeln und Cylindern 2. Ordnung 19

§ 5. Bestimmungen der Regelfläche H^2, welche die kubischen Nullkurven trägt, die 2 Nullgeraden in 2 gegebenen Punkten berühren 20

§ 6. Einige Folgerungen aus § 2 22

§ 7. Neue Definition und Konstruktion der Regelfläche H^2 24

§ 8. Verteilung der kubischen Nullkurven auf ∞^8 Regelflächen 2. Grades 28

§ 9. Kubische Nullkurven und beliebige Flächen 2. Ordnung 29

§ 10. Analytische Bestätigung der Resultate in § 7 bis § 9 30

§ 11. Analytische Darstellung des ∞^8-fachen Systems von Flächen 2. Ordnung 35

Kapitel III: Abbildung der Tangenten der kubischen Nullkurven auf den Punktraum 38

§ 12. Analytische Formulierung der Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum 38

§ 13. Das Bild einer kubischen Nullkurve (synthetisch) . . 41

§ 14. Analytische Darstellung desselben 43

Benutzte Literatur.

Die folgenden Werke sind in der Arbeit bloß mit dem Namen des Verfassers bezeichnet.

v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg, 1. Heft 1847, 3. Heft 1860.

Th. Reye: Geometrie der Lage. 4. Auflage.

R. Sturm: Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. Leipzig, 1. u. 2. Band 1892, 3. Band 1896.

Clebsch-Lindemann: Analytische Geometrie II_1. Leipzig 1891.

Lindemann: Math. Annalen 7, S. 56 ff.

Sophus Lie: Berührungstransformationen.

A. Voss: Math. Annalen 13, S. 232 ff.

St. Jolles: Crelle's Journal Bd. 130, S. 270 fi.

E. Heinrichs: Über den Bündel derjenigen kub. Raumkurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben. Dissertation, Münster 1886.

E. Weyr (u. Adler): Über Raumkurven 4. Ordnung 2. Art. Wiener Sitzungsberichte (16. März) 1871, 1875 (Bd. 72), 1882 (Bd. 86).

Cremona: Annali de Matematica 1861 IV S. 71 ff. (Intorno alla curva gobba del Quart 'Ordine per la quale passa una sola super ficie di secondo grado.)

Einleitung.

Mit der Frage nach den kubischen Ordnungskurven eines linearen Komplexes haben sich schon eine ganze Reihe von Geometern beschäftigt, wie die Literaturangabe erkennen läßt. Die bisherigen Resultate finden sich in den Lehrbüchern von Th. Reye und R. Sturm niedergelegt. Sie beziehen sich fast ausschließlich auf die kubischen Ordnungskurven, die durch eine gegebene Anzahl von Punkten gehen.

In der vorliegenden Arbeit werden nun zunächst alle diese Untersuchungen einheitlich aus einem Satz von v. Staudt entwickelt und erweitert. Dann werden aber darüber hinaus die Beziehungen der kubischen Nullkurven zu den Flächen 2. Grades und ihre Verteilung auf solchen eingehend behandelt. Es ergibt sich dabei das interessante Resultat, daß mit jedem linearen Komplex ∞^8 Flächen 2. Grades gegeben sind, die in bestimmter Weise je ∞^1 kubische Nullkurven tragen und einzeln konstruiert werden können. Mit Hilfe der infinitesimalen Transformationen eines linearen Komplexes in sich gelingt es, dieses Resultat auch analytisch zu verifizieren und zu zeigen, daß jedes Büschel von Flächen 2. Ordnung im allgemeinen gerade 4 solcher Flächen des ∞^8-fachen Systems enthält.

Im letzten Kapitel wird schließlich noch die Abbildung der Tangenten der kubischen Ordnungskurven auf den Punktraum analytisch durchgeführt, wobei sich (zum erstenmal) die Gleichung einer Raumkurve 4. Ordnung 2. Art von besonderer Form ergibt, und die Beziehungen der kubischen Nullkurven zu einem andern ∞^7-fachen System von Flächen 2. Ordnung angedeutet.

Kapitel I.

Untersuchung der Zahl der kubischen Nullkurven, welche durch gegebene Punkte gehen oder geg. Nullgeraden berühren.

§ 1.

Definitionen, Fundamentalsatz v. Staudt.

Folgende **allgemeine Definition von Sophus Lie***) sei vorangestellt:

Eine Raumkurve heißt dann Ordnungskurve eines beliebigen Strahlenkomplexes, wenn ihre sämtlichen Tangenten dem Komplex angehören.

So beschreiben z. B. bei einer Verschraubung eines linearen Komplexes (Gewindes) um seine Achse die (einzelnen) Punkte des Raums gewöhnliche Schraubenlinien, deren orthogonale Trajektorien (auf den einzelnen Rotationscylindern um die Achse des Komplexes) solche Ordnungskurven sind. Da die Schiebung parallel zu dieser Achse und die Rotation um sie lineare projektive Transformationen sind, so folgt, daß bei einer derartigen Schraubung um die Achse jede Ordnungskurve des linearen Komplexes wieder in eine solche von derselben Ordnung und Klasse übergeht.

Hier bei den Ordnungskurven 3. Ordnung läßt sich aber, wegen der innigen Verknüpfung des gegebenen linearen Komplexes mit einem Nullraum und wegen der besondern Eigenschaften einer kubischen Raumkurve noch eine **zweite Definition** aufstellen, die zuerst **v. Staudt****) gegeben hat: **„Eine unebene**

*) S. Lie: a. a. O. S. 230.

**) v. Staudt: Nr. 485.

Kurve 3. Ordnung soll eine Ordnungskurve in einem Nullsystem heißen, wenn in demselben jede der Kurve sich anschmiegende Ebene ihrem Anschmiegungspunkt zugeordnet ist.“

Diese Definition erklärt es auch, warum Herr Reye die kubischen Ordnungskurven eines linearen Komplexes auch **„kubische Nullkurven eines (gegebenen) Nullraums“** nennt.*) Wir wollen diesem Namen der Kürze wegen den Vorzug geben.

Die analytische Fassung der beiden Definitionen führt zu dem Resultat, daß es für die Koeffizienten der Gleichungen einer kubischen Raumkurve in Parameterform eine fünffache Bedingung ist, wenn die Kurve eine kubische Nullkurve eines gegebenen Nullraums sein soll; **es gibt demnach ∞^7 solcher Nullkurven, wie auch synthetisch auf mannigfache Art geschlossen werden kann.**)**

Den Übergang von den Definitionen zu den synthetischen Untersuchungen des 1. Kapitels vermittelt ein Satz von Staudt,***) der sich auf die folgenden zwei einfachen Hilfssätze gründet:

1. Hilfssatz:†) Die Schmiegungsebenen von 3 Punkten einer Raumkurve 3. Ordnung schneiden sich in einem Punkt der Ebene der 3 Schmiegungspunkte.

2. Hilfssatz (v. Staudt): „Ein Nullsystem ist eindeutig bestimmt durch ein Dreieck A, B, C und ein Dreikant α, β, γ, dessen Mittelpunkt in der Ebene des Dreiecks A, B, C liegt und dessen Seiten α, β und γ beziehungsweise durch die Ecken A, B und C gehen.“

Aus diesen beiden Hifssätzen folgt sofort:

1. Satz (v. Staudt): **„Schmiegen einer unebenen Kurve 3. Ordnung in den Punkten A, B und C die Ebenen α, β und γ sich an, so ist die Kurve eine Ordnungskurve des-**

---

*) Reye II S. 177.

**) Reye II S. 200.

***) Vergl. Staudt: Nr. 481 bis Nr. 486.

†) Zuerst veröffentlicht von Chasles 1857 in Liouville's Journal (S. 404). Höchst wahrscheinlich war v. Staudt vorher oder gleichzeitig im Besitz des Satzes, da er ihn öfters anwendet, ohne Chasles zu erwähnen.

jenigen Nullsystems, in welchem den Punkten A, B und C die Ebenen α, β und γ zugeordnet sind.“

v. Staudt zeigt, daß dann in jedem weitern Punkt D der Kurve die Schmiegungsebene mit der Nullebene übereinstimmt.*)

Durch die 3 Punkte A, B, C und ihre Nullebenen ist aber die kubische Nullkurve noch nicht bestimmt. Es gilt dafür der:

2. Satz (Fundamentalsatz von Staudt): **Die kubische Nullkurve durch 3 Punkte A, B und C ist erst bestimmt, wenn noch in der Nullebene eines derselben, z. B. A, eine Tangente (a), vorgeschrieben wird. Durchläuft dieselbe den Büschel (A, α), so beschreiben die beiden andern Tangenten in B und C dazu projektive Strahlenbüschel.**

Der **Beweis dieses Satzes** sei hier rasch erbracht, da er fürs Folgende wichtig ist (und auch in manchen Lehrbüchern nicht ganz klar dargestellt ist). Er geht aus vom **3. Hilfssatz** (v. Staudt): Sind A, B, C 3 Punkte einer kubischen Raumkurve, a, b, c ihre Tangenten, α, β, γ ihre Schmiegungsebenen und α_1, β_1, γ_1 die Tangentialebenen von A, B und C an die Regelfläche (a b c), so sind α und α_1 durch B und C, β und β_1 durch C und A, γ und γ_1 durch A und B harmonisch getrennt.

Denn ist p die von A kommende Gerade der 2. Geradenschar [a b c], die also dem Komplex nicht angehört, (die Schnittlinie der Ebenen A b und A c), und betrachtet man den Kegel 2. Ordnung, der die R^3 aus A projiziert, (also die Ebenen α, A b und A c längs a, AB und AC berührt), so ist offenbar die Ebene ABC die Polarebene von p in Bezug auf diesen Kegel, also auch $\alpha_1 = (p, a)$ die Polarebene der Geraden (α, ABC). Folglich sind die Kanten AB und AC harmonisch getrennt durch (ABC, α) und (ABC, α_1), also auch durch α und α_1 w. z. b. w.

Auf Grund dieses Hilfssatzes ist es nun leicht, wenn a gegeben ist, die zwei zugehörigen Tangenten der Raumkurve 3. Ordnung zu konstruieren.

Ist S der Schnittpunkt der 3 Nullebenen α, β und γ (der Nullpunkt von $\sigma =$ ABC), so suche man zunächst auf CS den S

*) Vergl. Reye II S. 177.

zugeordneten 4. harmonischen Punkt F in Bezug auf C und $H = (CS, AB)$ und dann den C zugeordneten 4. harmonischen Punkt C′ in Bezug auf F und H. Weil F und H konjugierte Punkte sind in Bezug auf den Kegelschnitt, den die gesuchte Regelfläche (abc) aus der Ebene ABC ausschneidet, da ja AF und BF auf Grund des Hilfssatzes dessen Tangenten in A und B sind, liegt C′ auf diesem Kegelschnitt. Durch C′ geht dann eine Erzeugende derjenigen Geradenschar, welcher a nicht angehört; sie würde folglich die 3 Tangenten a, b und c treffen. Verbindet man daher C′ mit (a, γ) durch die Gerade r′, so ist dies diese Erzeugende und die Verbindungslinie von B mit (r', β) muß b sein. Analog erhält man die Tangente c in C mittels der Erzeugenden r″ des Hyperboloids (abc) durch den Gegenpunkt B′ auf BS. Beschreibt nun a den Büschel (A, α), so wird der Büschel durch C′ infolge der gemeinsamen Punktreihe (α, γ) zu ihm perspektiv und zu diesem wieder perspektiv der Büschel b in (B, β) infolge der gemeinsamen Punktreihe (γ, β), also Büschel (A, α) projektiv Büschel (B, β) und analog projektiv (C, γ), w. z. b. w.

Fällt a mit (α, ABC) zusammen, so wird $b = BS$ und $c = CS$ d. h. die kubische Nullkurve zerfällt in die 3 Nullgeraden AS, BS und CS.

Es sei noch hinzugefügt, daß auch noch andere, weniger einfache Beweise unseres Fundamentalsatzes existieren, auf die wir hier nicht eingehen können.

§ 2.

Die Zahl und Lage der kubischen Nullkurven durch 3, 2 oder 1 Punkt.

Mit dem Fundamentalsatz haben wir gleichzeitig bewiesen:

3. Satz: Durch 3 beliebige Punkte A, B und C gehen ∞^1 kubische Nullkurven eines gegebenen Nullsystems; zu ihnen gehört auch die in die 3 Geraden AS, BS und CS zerfallende kubische Raumkurve, wo S der Nullpunkt von $\sigma = ABC$ ist.

Diese ∞^1 kubischen Nullkurven liegen, wie wir hier unter

Hinweis auf den Beweis von Cremona*) einfügen wollen, auf einem **Kegel 3. Ordnung** mit einer (im Allgemeinen isolierten) Doppelkante, S als Spitze, AS, BS und CS als Wendekanten und α, β, γ als Wendetangentialebenen. (Es läßt sich darauf auch eine Verteilung der sämtlichen kubischen Nullkurven auf ∞^6 Kegeln 3. Ordnung mit S als Spitze begründen, speziell, wenn man die ∞ ferne Ebene nimmt, auf ∞^6 Cylindern 3. Ordnung, deren Erzeugenden alle parallel zur Achse des Komplexes sind.)

Beim Beweis des 3. Hilfssatzes macht **v. Staudt noch folgende Bemerkung,** die uns die Spur weist, auf der wir zu neuen Resultaten gelangen, die mit dem Fundamentalsatz in engstem Zusammenhang stehen: „Die Ebenen (ap), (bp) und (cp), welche in den Punkten A, (b, p) und (c, p) der Regelfläche (abc) sich anschmiegen, schmiegen in denselben 3 Punkten sich auch der Regelfläche an, die durch die Kurve K [unsere kubische Nullkurve] und die beiden Geraden b und c (mithin nach Nr. 404 nicht durch a) geht, woraus man schließen kann, daß beide Flächen in der Geraden p sich berühren.“**)

Nehmen wir nämlich einen beliebigen Punkt A_1 auf p an, so geht durch ihn eine bestimmte Gerade a_1 der Regelschar (a b c), die dem Komplex angehört. Nach dem Fundamentalsatz v. Staudt gibt es dann eine einzige kubische Nullkurve, die in A_1 die Nullgerade a_1 berührt und durch B und C geht. Von dieser kubischen Nullkurve wollen wir nun im Folgenden zeigen, daß sie in B und C gerade **dieselben** Geraden b und c wie die 1. kubische Nullkurve berührt und mit dieser auf demselben, oben von Staudt angegebenen Hyperboloid liegt.

Dreht sich die Ebene A, B, C um (B, C) und betrachten wir in diesen Ebenen die Dreiecke, deren dritte Ecke A_1 auf p liegt, so sehen wir, daß die analog wie am Schluß von § 1 konstruierten Punkte C_1' und B_1' immer auf den zu derselben Geradenschar [a b c] wie p gehörigen Geraden r′ durch C′ und r″ durch B′ liegen. Da nun auch die Gerade (β, γ), die wir beidemal zur Konstruktion der Tangenten in B und C in § 1 benutzt haben,

---

*) Reye II, S. 201; vergl. auch Sturm III. S. 503.

**) v. Staudt: Nr. 485.

dieselbe bleibt, so sind die Tangenten b und c, die B und C mit den Schnittpunkten von r′ respektive r″ mit (β, γ) verbinden, dieselben wie vorher. Zum Beweis des 2. Teils der Behauptung könnte man mit Hilfe der Kegel, welche die (beiden) Raumkurven aus B und C projizieren, den Nachweis führen, daß jede Gerade, welche die R_1^3 und b und c trifft, auch die ursprüngliche Nullkurve schneidet. Dies läßt sich in der Tat an der Hand einer etwas komplizierteren Figur zeigen, aber nicht in kurzen Worten wiedergeben. Auf Grund der obigen v. Staudt'schen Bemerkung kann man aber auch direkt einsehen, daß die Raumkurven auf demselben Hyperboloid liegen, wenn man noch bedenkt, daß die Punkte A_1 auf p genau dieselbe Rolle spielen wie A. In § 5 wird dafür noch ein andrer Beweis angegeben. Wir können also den allgemeinen Satz aussprechen:

4. Satz: Die ∞^1 kubischen Nullkurven, die zwei Nullstrahlen b und c in zwei gegebenen Punkten B und C berühren, liegen auf einem bestimmten einschaligen Hyperboloid, das in B und C deren gemeinsamen Schmiegungsebenen β und γ berührt. Die Tangenten an die einzelnen kubischen Nullkurven in den Punkten einer Geraden p dieses Hyperboloids, die b und c trifft, (also der anderen Geradenschar desselben angehört), liegen auf einer andern Fläche 2. Grads; diese Komplexregelfläche (2. Grads) berührt das Hyperboloid, welches die ∞^1 kubischen Nullkurven trägt längs der Geraden p. Das Trägerhyperboloid erscheint demnach als Enveloppe von ∞^1 derartigen Komplexregelflächen 2. Grads, die alle durch b und c gehen*).

Die Tangenten b und c können nun noch unabhängig von einander in ihren Nullebenen je ∞^1 Lagen annehmen. Es folgt daher:

5. Satz: Durch 2 beliebige Punkte gehen ∞^3 kubische Nullkurven.

Zu den Sätzen über die kubischen Nullkurven durch **einen**

---

*) Vergl. § 6.

Punkt gelangen wir von hier aus im Zusammenhang, wenn wir z. B. den Kegel durch den Punkt B und eine seiner, soeben betrachteten, kubischen Nullkurven legen, welche in C die Tangente c haben. Der Kegel sei also bestimmt durch die 3 Kanten b, BC und BA und die 2 Tangentialebenen β und Bc.

Läßt man nun **einen** Punkt z. B. A eine Punktreihe, hier AB, beschreiben, so ändert sich nach unserm Fundamentalsatz für eine kubische Nullkurve durch A_1 und C die Tangente c und mit ihr der Kegel. Behält man umgekehrt den Kegel bei, so wird die kubische Raumkurve, die auf ihm liegt und durch A, auf AB, C und B geht und b und c zu Tangenten hat, keine kubische Nullkurve sein, da ja der Punkt aus dem obigen einschaligen Hyperboloid durch b und c heraustritt.

Da wir durch Änderung eines Punktes keine kubischen Nullkurven auf dem Kegel bekommen, fragen wir: Ist es nicht möglich durch gleichzeitige Änderung der **beiden** Punkte A und C auf AB und BC noch weitere kubische Nullkurven zu gewinnen, die ganz auf dem Kegel B^2 liegen? Wie kann man also, mit andern Worten, zu einem Punkt C_1 auf BC einen Punkt A_1 auf BA finden, so daß die durch die 3 Punkte B, A, und C_1 gehende und β in b berührende kubische Nullkurve auf den Kegel B^2 liegt? Dazu genügt es, wenn die Tangenten a_1 und c_1 Nullgeraden sind, die in den beiden festen Tangentialebenen längs BA und BC liegen. Die zu BA_1 und BC_1 im Komplex konjugierten Geraden (β, α) und (β, γ) bleiben aber dieselben. Zu C_1 erhält man daher die Tangente c_1 (analog wie in § 1), indem man diesen Punkt C_1 mit dem Schnittpunkt von (β, γ) mit der Tangentialebene (B, c) verbindet. Wie man sieht, bleibt aber bei unsern Operationen die ganze Nullebene β unverändert. Es drängt sich daher die Vermutung auf, daß der gesuchte Punkt A_1 der Schnittpunkt von BA mit der Geraden ist, die C_1 mit (BS, AC) verbindet, wenn S der Nullpunkt von ABC. In der Tat führt die Verbindungslinie die gewünschte Lösung herbei. Zur Bestätigung braucht man nur die Konstruktion der Tangenten a_1 und c_1 nach § 1 auszuführen und die Verlagerung der einzelnen Punkte näher zu verfolgen, um einzusehen, daß sich infolge des Auftretens von perspektiven Elementen in β gerade die obigen Tangenten a_1 und c_1

ergeben. Mittels des v. Staudt'schen Satzes haben wir also auf elementare Weise das Resultat gewonnen:

6. Satz: Auf jedem Kegel 2. Ordnung, der durch eine kubische Nullkurve hindurchgeht, lassen sich noch einfach unendlich viele andere kubische Nullkurven linear konstruieren.

Die tiefere Bedeutung dieser linearen Operationen werden wir in § 4 kennen lernen.

Um nun zu noch allgemeineren Sätzen zu gelangen, wollen wir den Nachweis erbringen, daß auf **jedem** Kegel 2. Ordnung, der die Nullebene β seiner Spitze B in einer Nullgeraden b berührt mindestens eine kubische Nullkurve liegt. Dieser **Existenzbeweis** läßt sich nach Reye*) folgendermaßen wiedergeben:

Der Kegel B^2, welcher durch die 3 Kanten b, BC und BA und die 2 Tangentialebenen β und (Bc) bestimmt ist, trägt, als teilweise Schnittkurve mit den entsprechenden Kegeln 2. Ordnung C^2, ∞^1 beliebige Raumkurven 3. Ordnung durch je einen beliebigen Punkt A_1 auf BA, die alle durch B und den jetzt fest gewählten Punkt C auf BC gehen und dort die zugehörigen Nullebenen in den Geraden b und c berühren. Durch einen beliebigen Punkt A_1 auf BA geht eine derselben. Sie ist der Schnitt des Kegels B^2 mit einem Kegel C^2, der Cb und γ längs BC und c berührt und durch A_1 geht. Ihre Tangente a_1 ist der Schnitt der Tangentialebenen der Kegel längs BA_1 und CA_1. Die Tangenten a_1 in den verschiedenen Punkten A_1 laufen nun aber alle nach einem Punkt in der Tangentialebene von B^2 längs BA, da nach bekannten Sätzen die Tangentialebene des Kegelbüschels C^2 längs der Kanten CA_1, die in einer Ebene CBA liegen, einen Ebenenbüchel bilden, dessen Achse in γ liegt. Der Strahlenbüschel dieser Tangenten a_1, den der Ebenenbüschel dieser Tangentialebenen aus der festen Tangentialebene von B^2 längs BA ausschneidet, enthält aber eine Nullgerade und die ihm entsprechende kubische Raumkurve ist eine kubische Nullkurve, da sie in A_1, B und C je eine der Nullgeraden a_1, b, c zur Tangente hat, w. z. b. w.

---

*) Reye II. S. 201.

Nun war aber C ein ganz beliebiger Punkt des Kegels B^2, so daß wir den allgemeinen Satz formulieren können:

7. Satz: (von Reye): „Auf jedem Strahlenkegel B^2 2. Ordnung, der die Nullebene β seines Mittelpunktes in einem Strahl b berührt, liegen (mindestens eine und folglich gleich) ∞^1 kubische Nullkurven; durch einen beliebigen Punkt C von B^2 geht eine von ihnen".

Da keine zwei der ∞^1 kubischen Nullkurven außer in B sich schneiden, so folgt, daß sich die 5 Schnittpunkte, die 2 kubische Raumkurven auf demselben Kegel allgemein haben*), in der Spitze B vereinigt haben.

Im Ganzen gibt es nun ∞^4 Kegel, die durch einen Punkt B gehen und seine Nullebene β berühren. Infolge von Satz 7 ergibt sich daher:

8. Satz: Durch einen beliebigen Punkt des Raums gehen ∞^5 kubische Nullkurven des gegebenen linearen Komplexes. Sie haben alle die Nullebene desselben zur gemeinsamen Schmiegungsebene.

§ 3.

Bestimmung von kubischen Nullkurven durch andere gegebene Elemente.

Wenn 3 Punkte für eine kubische Nullkurve vorgeschrieben sind, so kann ein 4. Punkt nur mehr auf dem zu Anfang von § 2 erwähnten **Kegel 3. Ordnung** liegen. **Durch 4 beliebig gelegene Punkte geht daher im Allgemeinen keine kubische Nullkurve mehr.** Bilden die 4 Punkte aber die Ecken eines Tetraeders, in dem 2 Gegenkanten in dem Komplex konjugiert sind, die beiden andern Paare also ein Vierseit aus lauter Nullgeraden bilden, so zerfällt die kubische Nullkurve durch 4 derartige Punkte notwendig auf Grund der 2. Definition in drei aufeinander folgende Geraden dieses Nullvierseits. Sie bilden die **2. Gruppe** der zerfallenden kubischen Nullkurven. Die 1. Gruppe war in Satz 3 angegeben. Daß eine kubische Nullkurve nicht

*) Reye II S. 299.

in einen Kegelschnitt und eine ihn treffende Nullgerade zerfallen kann, folgt unmittelbar aus der 1. Definition.

9. Satz: Eine kubische Nullkurve kann also nur in 3 Nullgeraden zerfallen und zwar sind folgende 2 Fälle möglich: Die 3 Geraden treffen sich entweder alle in einem Punkt (dem Nullpunkt ihrer Ebene) oder 2 von ihnen schneiden die 3. Nullgerade in 2 verschiedenen Punkten.

Aus § 2 können wir ferner noch Folgendes erschließen:

a) Mittels der Kegelschnitte, welche die ∞^4 obigen Kegel durch einen Punkt B aus einer beliebigen Ebene ausschneiden, läßt sich zeigen:

10. Satz: Durch einen beliebigen Punkt B gehen ∞^4 kubische Nullkurven, die eine beliebige Ebene ε berühren. Daher gehen auch durch jeden Punkt des Raums ∞^4 hyperbolische Null-Raumparabeln (zuweilen auch parabolische Raumhyperbeln genannt) unter denen auch die ∞^3 kubischen Null-Raumparabeln sind, die der ∞ fernen Ebene sich anschmiegen.

b) Aus den Beweisen der Sätze 5 und 8 kann man aber auch, wenn man bedenkt, daß ein Punkt auf einer Nullgeraden ∞^1 unabhängige Lagen einnehmen kann, ebenso gut (den Satz) herleiten:

11. Satz: Es gibt ∞^5 kubische Nullkurven, die 1 gegebene Nullgerade, ∞^3 die 2 gegebene Nullgeraden und folglich ∞^1 die 3 gegebene Nullgeraden berühren.

Da das Vorschreiben eines Berührungspunktes auf einer Nullgeraden eine einfache Bedingung für eine kubische Nullkurve ist, so wird es eine oder höchstens eine beschränkte **Anzahl von kubischen Nullkurven** geben, **die 3 gegebene Nullgeraden zu Tangenten haben und eine derselben (a) in einem gegebenen Punkt A berühren.** Da dieses **Analogon zum v. Staudt'schen Fundamentalsatz** bisher noch nicht beachtet wurde, wollen wir hier kurz auf seine Lösung eingehen.

Nach § 2 liegen alle kubischen Nullkurven, welche in A die Nullgerade a berühren, auf den ∞^3 Kegeln 2. Ordnung mit A als Spitze, welche die Nullebene α längs a zur Tangentialebene haben.

Soll die Kurve auch noch b und c berühren, so muß der zugehörige Kegel auch Ab und Ac zu Tangentialebenen haben. Solcher Kegel gibt es noch ∞^1 und es läßt sich zu jedem Punkt B auf b mit Hilfe des Brianchon'schen Satzes der zugehörige Punkt C auf c ermitteln. Die Punktreihen b und c werden dadurch projektiv auf einander bezogen.

Daß nun die kubische Nullkurve eines beliebigen der ∞^1 Kegel durch einen Punkt B nicht auch durch den zugehörigen Punkt C geht, ist wegen des Satzes 7 [und 2] klar. Im Allgemeinen erhält man daher auf jedem der ∞^1 Kegel zwei von einander verschiedene kubische Nullkurven. Es fragt sich nun, wie oft es vorkommt, daß beide Kurven zusammenfallen und wie wir die zugehörigen Punkte B und C finden.

Berücksichtigen wir aber noch den 3. Hilfssatz, wonach AB und AC von α und $\alpha_1 = (a, p)$ harmonisch getrennt sein müssen (p die Gerade durch A, die b und c schneidet), so können wir zu der Punktreihe b auf c noch eine zweite zu ihr projektive Punktreihe finden. Da aber dem Schnittpunkt (α, b) in beiden Fällen (α, c) entspricht, so ist (α, c) der eine Doppelpunkt der beiden zu b (also auch unter sich) projektiven Punktreihen c. Er kommt aber für unsere Konstruktion nicht in Frage, da er nur zu zerfallenden kubischen Nullkurven führt. Der andere Doppelpunkt C auf c und sein entsprechender Punkt B auf b existieren aber immer rell, weil (α, c) reell. Da er durch lineare Operationen gefunden werden kann, folgt:

12. Satz: Zu jedem Punkt A auf der Nullgeraden a lassen sich eindeutig und linear zwei Punkte B und C auf den Nullgraden C und c ermitteln, so daß durch A, B, C eine kubische Nullkurve geht, die a, b, c zu Tangenten hat.

Kapitel II.

Kubische Nullkurven in ihren Beziehungen zu Flächen 2. Ordnung.

Die Untersuchungen des 1. Kapitels über die Lagenbeziehungen der kubischen Nullkurven mögen nun in diesem Kapitel synthetisch und dann analytisch weitergeführt, durch Betrachtung der einfachsten Transformationen des Komplexes in sich vervollständigt und dann dazu verwertet werden, einen Ueberblick zu gewinnen über die sämtlichen ∞^7 kubischen Nullkurven eines Nullraumes durch Verteilung auf Flächen 2. Ordnung. Bei Lösung dieser Hauptaufgabe werden sich eine Reihe neuer Resultate ergeben, die dazu angetan sind, das Bild des Ganzen auch im Detail zu vervollständigen und Mängel der bisherigen Untersuchungen zu beseitigen.

§ 4.

Verteilung der kubischen Nullkurven auf Kegeln und Cylindern 2. Ordnung.

Die Sätze über die Verteilung der kubischen Nullkurven durch 1 Punkt auf Kegeln 2. Ordnung sind in der Hauptsache schon in § 2 entwickelt worden. Aus der Konstruktion der Tangenten der ∞^1 Kurven eines solchen Kegels B^2 läßt sich herauslesen, daß die homologen Tangenten derselben längs einer Erzeugenden des Kegels sich jedesmal in 1 Punkt der Nullebene β der Spitze schneiden. **Aus einer der kubischen Nullkurven eines Kegels B^2 kann man daher die ∞^1 zu ihr perspektiven 0-Kurven auf B^2 durch die ∞^1 Centralkollineationen oder Homologien ableiten, deren Zentrum B und deren Homologieebene β ist.***) Damit ist auch die Konstruktion der Tangenten in § 2 in ihrer tiefern Bedeutung dargelegt und erklärt.

Ueber die Verteilung der ∞^4 kubischen Nullkurven auf Kegeln 2. Ordnung gibt der folgende Satz Aufschluß:

13. Satz: Da der gegebene lineare Komplex ∞^7 kubische Nullkurven enthält und durch jeden Punkt P ∞^5 der-

*) Reye II. S. 203.

selben gehen, die zu je ∞^1 auf den ∞^4 Kegeln P^2 liegen, die P zur Spitze und π zur Tangentialebene haben, so muß man sämtliche kubische Nullkurven erreichen, wenn man sich mit P durch eine Ebene bewegt.*)

Für die unendlich ferne Ebene angewandt ergeben sich ∞^6 Cylinder 2. Ordnung, die je ∞^1 kubische Nullkurven tragen; letztere gehen aus je einer von ihnen durch Translation parallel zur Achse des betreffenden Zylinders hervor.

Die Verteilung auf ∞^6 Kegeln 2. Ordnung, deren Spitzen in 1 Ebene liegen, ist auf gar mannigfache Art möglich. Da jeder beliebige Punkt des Raumes Spitze von ∞^4 solcher Kegel ist, folgt:

14. Satz: Im Ganzen gibt es ∞^7 Kegel 2. Ordnung, welche je ∞^1 kubische Nullkurven tragen.

Sie ordnen sich, wie wir später sehen werden, in ein ∞^8-faches System von Flächen 2. Ordnung ein.

§ 5.

Weitere Bestimmungen der Regelfläche H^2, welche die ∞^1 kubischen Nullkurven trägt, die in 2 Punkten 2 gegebene Nullgeraden berühren.

In diesem Paragraphen sollen zunächst die elementaren Untersuchungen des § 2 von anderen Gesichtspunkten aus bestätigt und ergänzt werden. Es läßt sich der folgende Satz beweisen:

15. Satz): Die ∞^1 kubischen Nullkurven, die 2 Nullgeraden b u. c in B u. C berühren, gehen aus einer von ihnen durch die ∞^1 Kollineationen mit b u. c als Achsen hervor. Sie liegen folglich auf derselben Regelfläche H^2 durch b u. c.**

Die Geraden, die einer Tangente a der Kurve in den verschiedenen Kollineationen entsprechen, liegen alle in einer Regelschar des Komplexes; diese berührt H^2 längs der durch den Berührungspunkt der Tangente gehenden Geraden, die b und c trifft, also ist diese Fläche mit der des § 2 identisch.

---

*) Vergl. Reye II. S. 202.

**) R. Sturm, III., S. 501 u. Reye II. S. 204.

Zu derselben Regelfläche H^2 kommen die Herrn Reye und Jolles*) in anderm Zusammenhang. Wir beschränken uns hier auf ein kurzes Referat.

Man betrachte eine kubische Nullkurve und eine ihrer Sekanten d. Alle Sekanten der R^3, die zu dieser konjugiert sind in Bezug auf die ∞^1 Kegel, welche die R^3 aus ihren Punkten projizieren, erfüllen eine Regelschar R^2_d (welche auf obiger Fläche H^2 durch die Tangenten b und c in den Stützpunkten der Sekante d liegt). Die Sekante d und die ihr im Nullsystem zugeordnete Gerade d_0 sind auch in Bezug auf diese Fläche konjugiert. Die gescharte Involution mit diesen beiden Geraden d und d_0 als Achsen führt nicht nur das gegebene Gewinde, sondern auch diese Regelschar R^2_d in sich über. Die kubische Nullkurve auf ihr wird dabei in eine andere kubische Nullkurve übergeführt, die mit der ersten zusammen den vollständigen Schnitt von H^2 mit einer speziellen Regelfläche 4. Ordnung des Komplexes bildet, die ebenfalls in sich transformiert wird.

Zu jeder kubischen Nullkurve stehen ∞^2 andere in dieser invarianten Beziehung; zu jeder ihrer ∞^2 Sekanten gehört eine derselben, auf jeder Fläche 2. Ordnung durch sie liegt eine von ihnen.

Je zwei solche Kurven haben aber in den Schnittpunkten mit der gemeinsamen Sekante d nicht nur die Schmiegungsebenen β und γ gemein. Aus unseren Untersuchungen folgt, daß wir diesen Satz von Jolles noch dahin ergänzen können, daß die beiden Kurven in diesen Punkten auch gemeinsame Tangenten haben. Wir wollen dieses Resultat, da es in der Form und in Bezug auf kubische Nullkurven eines Nullraums noch nicht ausgesprochen ist, ausdrücken im

16. Satz: Die ∞^1 kubischen Nullkurven, die in B und C zwei Nullgerade b und c berühren, liegen auf einer bestimmbaren Regelschar $R^2_d \equiv H^2$, und sind zu je zweien konjugiert in dem geschart involutorischen Raum, der die gemeinsame Sekante BC = d und ihre sowohl in dem

---

*) Reye II. S. 194 u. 195 u. St. Jolles, S. 270 ff.

Nullsystem als auch im Polarsystem ihrer Trägerfläche H^2 konjugierte Gerade d_0 zu Achsen hat.

§ 6.

Einige Folgerungen aus § 2.

Die Regelfläche H^2 hat außer b und c mit den Nullebenen β und γ noch zwei andere Nullgerade b′ und c′ gemeinsam, die mit B und C zusammen das Nullvierseit bilden, das H^2 mit dem gegebenen linearen Komplex gemeinsam hat.*) Mit A. Voß sei das so entstehende Tetraeder B C A D ein gemeinschaftliches **Schmiegungstetraeder** der ∞^1 kubischen Nullkurven auf H^2 genannt.

Wie durch B und C, so werden auch durch die Gegenecken A und D ∞^1 kubische Nullkurven gehen, welche **dieselben** Geraden b und c berühren. Ihre **Trägerfläche H^2_0** geht ebenfalls durch das Nullvierseit b, c, b′, c′ hindurch und es ist zu erwarten, daß beide Flächen H^2 und H^2_0 in irgend einem Zusammenhang stehen. Da A und D auf der zu B C konjugierten Geraden liegen, drängt sich die Vermutung auf, daß beide Flächen in dem gegebenen Nullsystem konjugiert sind. Daß dies wirklich der Fall ist, sei nun rasch nachgewiesen.

Der Regelfläche H^2 ist in dem gegebenen Nullsystem eine **andere Regelfläche H_1^2 zugeordnet,** die durch dasselbe Nullvierseit geht. Die Tangenten der zuerst beachteten kubischen Nullkurven auf H^2 längs einer Erzeugenden p der Fläche, welche b und c schneidet, erfüllen nach § 2 und 5 eine Regelschar des gegebenen Komplexes, die H^2 längs p berührt. Sie treffen folglich auch alle die p zugeordnete Gerade p′ und berühren in ihr H_1^2. Dadurch werden aber die Punkte von H^2 und H_1^2 eindeutig und linear einander zugeordnet. Beschreibt ein Punkt P von H^2 die Gerade p, so beschreibt der zugeordnete Punkt P′ von H_1^2 die Gerade p′. Den Punkten B und C entsprechen die Gegenecken A und D. Es läßt sich sogar noch mehr aussagen: Die Tangentialebene eines Punktes P ist zugleich die Nullebene von P′ und umgekehrt, da die durch P und P′ gehenden Geraden p und p′ konjugiert sind und in den Tangentialebenen liegen.

*) Vergl. Clebsch-Lindemann, II_1, S. 228 u. § 10 u. 11.

Durch diese **lineare Verwandtschaft,** die zu den Cremona-Transformationen gehört, entspricht nun jeder Kurve auf H^2 eine andere Kurve auf H_1^2 von gleicher Ordnung und Klasse wie die erste. Fassen wir daher speziell die kubischen Nullkurven auf H^2 ins Auge, so entsprechen ihnen kubische Raumkurven auf H_1^2 und diese sind kubische Nullkurven desselben Nullraums, da ihren Punkten auf Grund der obigen Betrachtung als Schmiegungsebenen die betreffenden Nullebenen zugewiesen sind. Die Tangenten einer kubischen Nullkurve auf H^2 sind auch Tangenten einer anderen kubischen Nullkurve auf H_1^2. Die kubischen Nullkurven auf H^2 berühren nun alle die beiden Nullgeraden b und c in B und C. Daher berühren die entsprechenden Kurven auf H_1^2 alle dieselben Geraden, aber in den Gegenecken A und D, d. h. es ist H_1^2 mit H_0^2 identisch. Wir haben also festgestellt:

17. Satz: In dem gegebenen Nullraum ist der Regelfläche H^2 (welche die ∞^1 kubischen Nullkurven trägt, die zwei Nullgeraden b und c in 2 Punkten B und C berühren), eine zweite Regelfläche H_1^2 zugeordnet, welche durch dasselbe Nullvierseit geht, das die 1. Fläche mit dem gegebenen Komplex gemein hat. Sie trägt die ∞^1 kubischen Nullkurven, die b und c in den Punkten A und D (auf der zu BC konjugierten Geraden) berühren. Die Schmiegungsebenen längs einer kubischen Nullkurve der einen Fläche sind Tangentialebenen der anderen Fläche längs der ihr zugeordneten Nullkurve, so daß beide Kurven dieselben Nullgeraden zu Tangenten haben.

Da diese gemeinsamen Tangenten der ∞^1 Kurven zugleich gemeinsame Tangenten der beiden konjugierten Regelflächen sind und sich auf ∞^1 Regelscharen des linearen Komplexes verteilen lassen, erfüllen sie eine Kongruenz 2. Ordnung und zwar 2. Klasse, die die Geraden des Nullvierseits, in dem die Flächen sich durchdringen, zu Doppelstrahlen hat. Diese Kongruenz ist aber hinreichend gut bekannt*). (Sie hat unsere beiden Flächen H^2 und H_1^2 zur Brennfläche und erscheint hier als Schnitt des Tangentenkomplexes einer der beiden Flächen

*) Vergl. F. Schur, Zeitsch. f. M. u. Ph. 1880 S. 414 u. Sturm II, S. 208—217.

mit dem gegebenen linearen Komplex. Eine solche Kongruenz kann auch als Schnitt des letzteren mit einem bestimmten tetraedralen Komplex dargestellt werden. Wir werden so auf einen tetraedralen Komplex hingewiesen, den wir im nächsten Paragraphen kennen lernen.) Vorläufig können wir also konstatieren:

18. Satz: Die Tangenten der ∞^1 kubischen Nullkurven auf H^2 erfüllen eine bestimmte Strahlenkongruenz 2. Ordnung und 2. Klasse mit den Geraden ihres Nullvierseits als Doppelstrahlen und H^2 als der einen Schale der Brennfläche. Die andere Schale der Brennfläche ist die ihr im Nullsystem konjugierte Fläche H_0^2 des Satzes 17. Die Kongruenz ist zugleich der Schnitt des Tangentenkomplexes einer dieser Flächen 2. Grads mit dem gegebenen linearen Komplex.

Aus den Untersuchungen des Herrn Sturm über diese Kongruenz können wir für folgende Anwendung machen:

19. Satz: Zu der obigen Kongruenz gibt es eine zweite mit ihr konfokale Kongruenz, zu der aber nicht das gegebene Gewinde gehört, sondern ein anderes, das sich auf das gegebene stützt. Daher sind die ∞^1 Raumkurven 3. Ordnung auf der einen Schale H^2 der Brennfläche, die in B und C die beiden anderen Nullgeraden b' und c' berühren, also die einfachen Treffstrahlen der früher betrachteten Kurven zu Sekanten haben, nicht mehr kubische Nullkurven desselben linearen Komplexes, sondern dieses zweiten zur konfokalen Kongruenz gehörigen.

§ 7.

Neue Definition und Konstruktion von H^2.

Wenn uns auch die Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen wesentlich gefördert haben in der Erkenntnis der Eigenschaften der ∞^1 kubischen Nullkurven, die 2 Nullgeraden in 2 gegebenen Punkten B und C berühren, so haben sie doch alle noch etwas unbestimmtes an sich. Denn keine gibt uns wirklich die Mittel an die Hand, ihre Trägerfläche

H^2 nun auch zu finden, wenn nur diese beiden Punkte und ihre Tangenten gegeben sind. Denn durch das Nullvierseit b, c, b′, c′, das mit diesen Daten auch gegeben ist, gehen noch unendlich viele Flächen 2. Grades und die Betrachtungen der letzten Paragraphen gaben uns auch keinen Aufschluß darüber, welches nun eigentlich die ausgezeichneten Flächen dieses speziellen Büschels sind. Für die Untersuchungen in § 2 und § 5 ist charakteristisch, daß H^2 nur auffindbar ist, wenn schon eine ihrer kubischen Nullkurven vorliegt. In diesem Fall sind alle 3 Konstruktionen ziemlich einfach. Jetzt wollen wir noch eine weitere Definition kennen lernen, welche die Schlußsätze in § 6 vervollständigt und uns eine wirkliche Konstruktion möglich macht, wenn nur die beiden Nullgeraden und ihre Berührungspunkte gegeben vorliegen.

Diese **neue Definition** gründet sich auf die Hauptergebnisse der Dissertation von **E. Heinrichs** (Münster 1887), die wir, soweit sie in Frage kommen, in der Form einiger Hilfssätze ohne Beweis wiedergeben wollen.

4. Hilfssatz: Die Tangenten der ∞^2 Raumkurven 3. Ordnung, welche in 2 Punkten B und C die Geraden $b = BA$ und $c = CD$ berühren und $\beta = BAD$ und $\gamma = CAD$ zu Schmiegungsebenen haben, erfüllen denjenigen Reye'schen Komplex, dessen Grundtetraeder BCAD und dessen Strahlen die Seitenflächen desselben so schneiden, daß das Doppelverhältnis der nach den gegenüberliegenden Ecken benannten Schnittpunkte den Wert $(\mathfrak{BCAD}) = \frac{1}{4}$ hat*). Der Komplex sei mit $BCAD\,\frac{1}{4}$ bezeichnet.

5. Hilfssatz: Eine beliebige Gerade ist eigentliche Sekante, Tangente oder uneigentliche Sekante einer Kurve des Bündels, je nachdem das Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit den Tetraederebenen $(\mathfrak{BCAD}) \gtreqless \frac{1}{4}$ ist. Die Gerade hat dieselbe Eigenschaft für eine Kurve des Gegenbündels, d. h. desjenigen Bündels, dessen Kurven dieselben Tetraederkanten b und c zu Tangenten, aber A und D zu Berührungspunkten; ABC und DBC zu Schmiegungsebenen haben.

6. Hilfssatz: Die Tangenten derjenigen Kurven, die das

*) Auch bei R. Sturm I, S. 361 aufgenommen.

Bündel bilden, in dem $b' = BD$ und $c' = CA$ die gemeinsamen Tangenten in B und C sind, erfüllen den Reye'schen Komplex $|\mathfrak{BCAD}\,4|$.

Aus diesen Hilfssätzen folgt sofort die neue Definition:

20. Satz: Die Tangenten der ∞^1 kubischen Nullkurven, welche die Nullgeraden b und c in B und C berühren, erfüllen die Schnittkongruenz des gegebenen linearen Komplexes mit dem tetraedralen oder Reye'schen Komplex $|\mathfrak{BCAD}\,\frac{1}{4}|$, dessen Grundtetraeder das gemeinsame Schmiegungstetraeder der ∞^1 Kurven ist. Weil in diesem aber 2 Gegenkanten (BC und AD) im gegebenen Nullsystem konjugiert sind, ist diese aber keine allgemeine Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse mit einer Kummer'schen Fläche 4. Ordnung als Brennfläche, sondern eine solche mit den 4 Nullgeraden des Schmiegungstetraeders als Doppelstrahlen. Die 2 Schalen der Brennfläche, die aus je einer Fläche 2. Grades durch dieses Nullvierseit bestehen und im gegebenen Nullsystem konjugiert sind, sind die obigen Trägerflächen H^2 und H_0^2.

Darauf beruht folgende einfache **Konstruktion der Regelfläche H^2:** Zu einem beliebigen Punkt P gehört ein bestimmter Komplexkegel 2. Grades, dessen Kanten dadurch bestimmt sind, daß durch sie nach den 4 Geraden PB, PC, PA, PD ein Ebenenwurf geht, dessen Doppelverhältnis gleich $\frac{1}{4}$ ist. Die Nullebene von P schneidet aus diesem Kegel die 2 Strahlen der Kongruenz durch P aus. Sucht man nun die beiden Flächen des Bündels durch das Nullvierseit b, c, b', c', die einen dieser Kongruenzstrahlen berühren, so sind dies die Brennflächen der Kongruenz*); (die Berührungspunkte sind bekanntlich die Doppelpunkte der Involution, welche die Flächen des Büschels auf dem Strahl ausschneiden). Um zu entscheiden, welcher der beiden Berührungspunkte nun gerade diejenige Fläche (H^2) bestimmt, deren kubische Nullkurven b und c in B und C berühren, konstruiert man die Kegel B^2 und C^2, die in B und C die Ebenen β und Bc resp. γ und Cb berühren, und sieht zu, für welchen der beiden

*) Vergl. Sturm II, S. 217.

Punkte die zugehörigen Tangentialebenen dieser beiden Kegel sich in einer Nullgeraden schneiden (nach § 2).

Aus dem 6. Hilfssatz folgt ferner:

21. Satz: Die Tangenten der ∞^1 kubischen Nullkurven, die in B und C die beiden anderen Gegenkanten b′ und c′ berühren, erfüllen die Schnittkongruenz des gegebenen linearen Komplexes mit dem Reye'schen Komplex $|\mathfrak{BCAD}4|$. Ihre Trägerfläche ist daher von der soeben betrachteten H^2 verschieden.

22. Satz: In dem Büschel von Flächen 2. Grads durch ein Nullvierseit des gegebenen Nullsystems gibt es also 4 ausgezeichnete, zu 2 Paaren konjugierte Flächen, die je ∞^1 kubische Nullkurven tragen, so daß diese das Tetraeder des Nullvierseits in bestimmter Weise zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben.

Es bleibt jetzt nur noch die Frage offen: Welche Rolle spielen nun eigentlich die **beiden Flächen des Büschels, deren eine Regelschar ganz dem gegebenen Komplex angehört?** Nach A. Voss*) hat diejenige Regelfläche des Komplexes, die b und c zu Leitlinien hat, zu allen kubischen Nullkurven, die diese beiden Nullgeraden berühren, eine gewisse covariante Beziehung, da die Anordnung im binären Gebiet erst durch drei Elemente festgelegt ist.

Aus der oben erwähnten Involution auf einem Strahl der betrachteten Kongruenz [2,2] folgt, daß die beiden Punkte, in denen dieser die Brennflächen berührt, auch harmonisch liegen zu den Schnittpunkten mit der Regelfläche des Komplexes, die b und c zu Leitlinien hat. Aus § 6 und § 3 folgt daher:

23. Satz: Je zwei zugeordnete kubische Nullkurven von H^2 und H_0^2, die gemeinsame Tangenten haben, sind, auch polar zueinander inbezug auf die Regelfläche 2. Grades des Komplexes, die b und c zu Leitlinien hat. Die ∞^2 Trägerflächen 2. Grades der ∞^3 kubischen Nullkurven, die b und c berühren, sind also zu je zweien sowohl im gegebenen Nullsystem als auch im Polarsystem der Kom-

*) A. Voss, a. a. O.

plexregelfläche, die b und c als Leitlinien hat, gleichzeitig einander konjugiert.

§ 8.

Verteilung der sämtlichen kubischen Nullkurven auf ∞^8 Regelflächen 2. Grads.

Im letzten Paragraphen ergab sich, daß zu jedem Tetraeder, in dem 2 Gegenkanten d und d_0 im gegebenen Nullsystem konjugiert sind, 4 Regelflächen H^2 mit je ∞^1 kubischen Nullkurven gehören, die eindeutig konstruiert werden können. Da die Ecken B und C auf d und A und D auf d_0 noch je ∞^1 von einander unabhängige Lagen einnehmen können, geben 2 konjugierte Geraden d und d_0 Veranlassung zu ∞^4 solchen Tetraedern. Es gibt daher ∞^8 solcher Flächen 2. Grads, die je ∞^1 kubische Nullkurven tragen. Je ∞^2 derselben gehen durch dieselbe kubische Nullkurve, da jede ihrer ∞^2 Sekanten als eine Kante d und die beiden Tangenten in ihren Stützpunkten auf die Kurve als 2 Gegenkanten b und c eines der obigen Tetraeder angesehen werden können. Auch daraus könnte man die Zahl dieser Flächen ableiten, wenn man noch berücksichtigt, daß je ∞^1 Kurven auf 1 Fläche liegen. Es ergeben sich $\infty^{7+2-1} = \infty^8$ solcher Flächen*). Im letzten Paragraphen fanden wir auch die Beziehung dieser Flächen zu dem gegebenen linearen Komplex.

24. Satz: Die ∞^7 kubischen Nullkurven eines Nullraums lassen sich auf ein ∞^8-faches System von Flächen 2. Grads verteilen. Jede der Flächen wird in bestimmter Weise von ∞^1 kubischen Nullkurven erfüllt und durch jede der ∞^7 Kurven gehen ∞^2 dieser Flächen. Diese sind die Brennflächen der Schnittkongruenzen des gegebenen linearen Komplexes mit den ∞^8 tetraedralen Komplexen $|BCAD\frac{1}{4}|$, die die konjugierten Geraden BC und AD zu Gegenkanten ihres Grundtetraeders haben, so daß BA und CD die gemeinsamen Tangenten der je ∞^1 kubischen Nullkurven werden, die auf diesen Brennflächen liegen.

*) Vergl. die Bemerkung bei Sturm III. S. 502.

§ 9.

Kubische Nullkurven und beliebige Flächen 2. Ordnung.

Es soll jetzt noch die letzte denkbare **Möglichkeit** untersucht werden, ob nicht eine Fläche 2. Ordnung, die nicht zu dem ∞^8-fachen System gehört, **eine diskrete Anzahl von kubischen Nullkurven** tragen kann.

Von vorneherein ist klar, daß als solche Flächen 2. Ordnung nur die Regelflächen in Betracht kommen, (da eine R^3 immer als Schnitt zweier Flächen 2. Ordnung dargestellt werden kann, die eine Erzeugende gemeinsam haben). Nun enthält im Allgemeinen jede Regelfläche 2. Ordnung ein Nullvierseit des gegebenen Nullsystems, dessen zu einem Tetraeder fehlenden Gegenkanten sowohl im gegebenen Nullsystem als auch im Polarsystem der Fläche konjugiert sind*). Deshalb brauchen wir bei Betrachtung von beliebigen Flächen 2. Ordnung nur die ∞^1 Flächen durch ein solches Nullvierseit zu berücksichtigen. Wir wollen nun auf indirektem Wege zeigen, daß die Fläche, wenn sie nicht zufällig eine der 4 Flächen des ∞^8-fachen Systems ist, außer den zerfallenden Kurven des Nullvierseits keine kubische Nullkurve enthalten kann.

Wir nehmen an, die Fläche trage eine nicht zerfallende kubische Nullkurve. Ihre eine Regelschar besteht dann aus Sekanten, ihre andere aus einfachen Treffstrahlen dieser Kurve. Da sie kubische Nullkurve sein soll, so müssen notwendig die beiden Nullgeraden der Sekantenschar 2 Tangenten b und c der Nullkurve sein, die in ihren Berührungspunkten von je einer der Nullgeraden der Schar der einfachen Treffstrahlen geschnitten werden. Die Figur des Schmiegungstetraeders ist also wiedergewonnen und man kann jetzt nach § 2 und § 5 sofort noch ∞^1 kubische Nullkurven auf der Fläche konstruieren. Diese gehörte also gegen unsere Voraussetzung dem ∞^8-fachen System an, so daß wir konstatiert haben:

25. Satz: Wenn eine Fläche 2. Grades eine nicht zerfallende kubische Nullkurve enthält, so liegen auf ihr

---

*) Vergl. F. Schur, Weber-Festschrift S. 81 ff. und § 11.

sogleich einfach unendlich viele und sie gehört demnach zu unserm ∞^8-fachen System in § 8. Gehört die Fläche umgekehrt nicht zu diesem, so können auf ihr nur zerfallende kubische Nullkurven liegen. Die ∞^6 Regelflächen 2. Ordnung des Komplexes gehören daher nicht dem ∞^8-fachen System an. Während aber eine beliebige Regelfläche nur 4 zerfallende kubische Nullkurven ihres Nullvierseits enthält, tragen diese Komplexregelflächen deren gleich unendlich viele, indem jede ihrer Nullgeraden ihrer Komplexregelschar mit den beiden Nullgeraden der andern Schar eine zerfallende kubische Nullkurve nach Satz 9 bildet.

§ 10.

Analytische Bestätigung der Resultate von § 7 bis § 9.

Um zu einer analytischen Darstellung der in Satz 22 gefundenen 4 Flächen unseres ∞^8-fachen Systems von Flächen 2. Ordnung zu gelangen, gehen wir von einem andren Gesichtspunkt aus, indem wir die Arbeiten von Herrn **Prof. Lindemann***) **über die infinitesimalen Transformationen eines linearen Komplexes in sich** benutzen.

Bei Ausführung einer solchen Transformation, deren **kanonische Form** gegeben ist durch:

(1) $dx_k = a_k x_k d\lambda$, wobei $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ und $a_k = \log \alpha_k$ gesetzt ist, geht jeder Komplex des Büschels

(2) $$\beta_{14} p_{14} + \beta_{23} p_{23} = 0$$

in sich über. Die Verbindungslinien von solchen zwei unendlich benachbarten Punkten, die dabei in einander übergeführt werden, erfüllen den sogenannten **Charakteristikenkomplex:**

(3) $(a_2 - a_4)(a_3 - a_1) p_{12} p_{34} = (a_4 - a_3)(a_2 - a_1) p_{12} p_{42}$

dessen Gleichung mittels der zwischen den p_{ik} notwendig bestehenden Identität auch in der Form

$$(a_4 - a_1)(a_3 - a_2) p_{12} p_{34} = (a_4 - a_3)(a_2 - a_1) p_{23} p_{14}$$

geschrieben werden kann, so daß das **charakterisierende Doppelverhältnis dieses durch die Koeffizienten der**

*) Math. Annalen 7 S. 56 ff. u. Clebsch-Lindemann II_1 S. 395.

Transformation allein bestimmten tetraedralen Komplexes gleich $-\frac{(a_2 - a_4)(a_3 - a_1)}{(a_4 - a_3)(a_2 - a_1)}$ **ist.**

Bei der infinitesimalen Transformation (1) bewegt sich nun ein beliebiger Punkt x_k des Raums so, daß er auf der durch ihn bestimmten **Fläche des Büschels:**

(4) $$a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 = 0$$

bleibt. Er beschreibt auf ihr bei wiederholter Ausführung derselben infinitesimalen Transformation eine sogenannte **projektivische Schraubenlinie.** Es ist nun leicht, die Koordinaten eines Punktes derselben durch einen Parameter λ auszudrücken. Der Punkt x_k nimmt nämlich nacheinander die Lagen $x_k + d x_k$ und $x_k + 2 d x_k + d^2 x_k$ ein, was unter Benutzung von (1) zu der Differentialgleichung 2. Ordnung führt:

$$d^2 x_k = a_k \, d x_k \, d\lambda = a_k^2 x_k \, d\lambda^2$$

Deren **Lösung** ist:

(5) $$\varrho x_k = c_k e^{a_k \lambda} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

wobei $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ ist und die c_k willkürliche Konstanten sind, die als Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve aufgefaßt werden dürfen.

Sobald nun die Koeffizienten der Transformation (1) und der lineare Komplex gegeben sind, ist dadurch der Komplex (3) und die **Schnittkongruenz beider** festgelegt. Auf jeder Schale ihrer **Brennfläche**

(6) $$\beta_{14} (a_4 - a_1) x_1 x_4 + \beta_{23} (a_3 - a_2) x_2 x_3 = 0$$
$$\beta_{14} (a_3 - a_2) x_1 x_4 + \beta_{23} (a_4 - a_1) x_2 x_3 = 0$$

entsteht eine einfach unendliche Schar von Kurven des Systems (5), deren Tangenten diese Schnittkongruenz erfüllen und zwar so, daß die Tangenten längs einer bestimmten Erzeugenden des einen Geradensystems von (6) auf einer Komplexregelfläche 2. Grads liegen. Umgekehrt erhält man auf jeder Fläche des Büschels (4) eine einfach unendliche Schar des Kurvensystems (5) (und eine bestimmte infinitesimale Transformation (1) dazu), wenn ihre Tangenten einem gegebenen linearen Komplex angehören sollen, wie Klein und Lie zuerst erkannt haben. Da es sich hier um eine bei allen gewöhnlichen Transformationen invariante Beziehung

auf der betreffenden Fläche 2. Grads in sich handelt, so ist klar:

Auf jeder der ∞^9 Flächen 2. Grads liegen je ∞^1 Ordnungskurven unseres gegebenen linearen Komplexes. Wenn wir nun fordern, daß diese Kurven 3. Ordnung sein sollen, so wird dadurch, wie wir zeigen werden, der Fläche eine einfache Bedingung auferlegt; es wird dann also ∞^8 Flächen 2. Ordnung geben, die je ∞^1 kubische Nullkurven tragen.

Wir müssen also zuerst zusehen, ob es gelingt, kubische Raumkurven des Systems (5) durch **passende Wahl der Koeffizienten der Transformation** (1) zu finden. Wie man der Form (5) ansieht, ergeben sich dann kubische Raumkurven, wenn man setzt:

$$(7) \qquad \alpha_k = \varrho^k \text{ also } a_k = \log \varrho_k.$$

Dann wird $\varrho x_k = c_k \varrho^k$, oder wenn man die linken Seiten mit $\varrho^2 = \nu$ multipliziert: $\varrho x_k = c_k \varrho^{(k-1)}$, d. h.

$$I^a) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1 : c_2 \nu : c_3 \nu^2 : c_4 \nu^3$$

Man kann also zunächst auf **jeder** Fläche des Büschels (4) kubische Raumkurven als projektivische Schraubenlinien finden, wenn man den linearen Komplex noch nicht festgelegt hat.

Sollen aber die Tangenten der Kurven I^a)

$$(8^a) \qquad p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{42} : p_{34} =$$
$$c_1 c_2 : 2 c_1 c_3 \nu : 3 c_1 c_4 \nu^2 : c_2 c_3 \nu^2 : -2 c_2 c_4 \nu^3 : c_3 c_4 \nu^4$$

dem linearen Komplex

$$(9) \qquad \alpha_{14} p_{14} + \alpha_{23} p_{23} = 0$$

angehören, so muß notwendig $3 \alpha_{14} c_1 c_4 + \alpha_{23} c_2 c_3 = 0$ sein, d. h. **der Punkt c_k muß auf der folgenden Fläche 2. Ordnung liegen:**

$$II^a) \qquad 3 \alpha_{14} x_1 x_4 + \alpha_{23} x_2 x_3 = 0.$$

26. Satz: Die der Transformation (7) entsprechenden projektivischen Schraubenlinien auf den Flächen des Büschels (4) sind also dann kubische Ordnungskurven des linearen Komplexes (9), wenn der Punkt c_k auf der Fläche II^a) liegt, deren Koeffizienten a_{14} und a_{23} der linearen Gleichung $a_{14} \alpha_{23} - 3 a_{23} \alpha_{14} = 0$ genügen. Aus

der Form der Gleichung I^a) ist sofort ersichtlich, daß alle diese kubischen Nullkurven durch die Ecken A_1 und A_4 des Koordinatentetraeders gehen und dort $A_1 A_2$ resp. $A_4 A_3$ zu Tangenten und $A_1 A_2 A_3$ resp. $A_4 A_3 A_2$ zu Schmiegungsebenen haben*).

Weiter läßt sich nun, wie ja von vorneherein auf Grund unserer obigen allgemeinen Betrachtungen zu erwarten ist, nachweisen, daß **die Fläche I^a) die eine Schale der Brennfläche der Schnittkongruenz von (9) mit dem zugehörigen Charakteristikenkomplex**

10^a) $$4\,p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} = 0$$

ist. Die andere Schale der Brennfläche hat dann die Gleichung:

II^b) $$\alpha_{14}\,x_1\,x_4 + 3\,\alpha_{23}\,x_2\,x_3 = 0.$$

27. Satz: Auf II^b) liegen aber auch ∞^1 kubische Nullkurven, die alle in den Ecken A_2 und A_3 dieselben Geraden $A_2 A_1$ resp. $A_3 A_4$ berühren. Man erhält sofort ihre Gleichung, wenn man in (7) und in I^a) auf den rechten Seiten a_1 mit a_2 und a_3 mit a_4 vertauscht zu

I^b) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1\,v : c_2 : c_3\,v^3 : c_4\,v^2$$

so daß die Bedingung $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ erfüllt bleibt und auch der zu dieser infinitesimalen Transformation gehörige Charakteristikenkomplex derselbe bleibt.

Die zugehörigen Tangenten haben die Koordinaten:

8^b) $$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{42} : p_{34} =$$
$$-c_1 c_2 : +2 c_1 c_3 v^3 : c_1 c_4 v^2 : 3 c_2 c_3 v^2 : -2 c_2 c_4 v : -c_3 c_4 v^4$$

und gehören dem Komplex (9) an, wenn der Punkt c_k auf der Fläche II^b) liegt.

28. Satz: Vertauscht man aber in (7) rechts nur die Koeffizienten a_2 und a_3, so erhält man zu dieser Transformation, die auch der Bedingung $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ genügt, die kubischen Raumkurven

I^c) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1 : c_2\,v^2 : c_3\,v : c_4\,v^3$$

die alle durch A_1 und A_4 gehen und dort A_1 A_3 resp.

*) Vergl. Clebsch-Lindemann II_1, S. 241 ff.

$A_4\,A_2$ zu Tangenten und $A_1\,A_3\,A_2$ resp. $A_4\,A_2\,A_3$ zu Schmiegungsebenen haben. Ihre Tangenten

$8^c)$ $$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{42} : p_{34} =$$
$$-2c_1c_2\nu : -c_1c_3 : -3c_1c_4\nu^2 : c_2c_3\nu^2 : -c_2c_4\nu^4 : -2c_3c_4\nu^3$$

gehören aber nur dann dem linearen Komplex (9) an, wenn c_k auf der Fläche liegt:

$II^c)$ $$3\alpha_{14}x_1x_4 - \alpha_{23}x_2x_3 = 0.$$

Der zu dieser Transformation gehörende tetraedrale Komplex ist:

$10^b)$ $$\tfrac{1}{4}\,p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} = 0$$

29. Satz: Analog erhält man durch Vertauschung von a_1 und a_4 in II^b die kubischen Raumkurven

$I^d)$ $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = c_1\nu^2 : c_2 : c_3\nu^3 : c_4\nu$$

durch A_2 und A_3 mit $A_2\,A_4$ und $A_3\,A_1$ als gemeinsamen Tangenten, deren Tangenten

$8^d)$ $$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{42} : p_{34} =$$
$$-2c_1c_2\nu : c_1c_3\nu^4 : -c_1c_4\nu^2 : 3c_2c_3\nu : -c_2c_4 : -2c_3c_4\nu^3$$

dem Komplex (9) angehören wenn c_k auf der Fläche

$II^d)$ $$\alpha_{14}x_1x_4 - 3\alpha_{23}x_2x_3 = 0$$

liegt, d. i. die zweite Schale der Brennfläche der Schnittkongruenz von (9) und $10^b)$.

30. Satz: Andere Vertauschungen der Koeffizienten $a_k = \log \varrho^k$ der infinitesimalen Transformationen (1) und (7) ergeben immer dieselben Kurven I und Flächen II, solange die Bedingung $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ erfüllt bleibt.

31. Satz: Erwähnt sei noch, daß wir die Gleichungen II in Linienkoordinaten auch erhalten können durch Addition der Gleichung $10^a)$ resp. $10^b)$ zu dem mit einem bestimmten Vielfachen der Faktoren 4, 3, $^3/_4$ resp, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$ (aus (3) und (7)) multiplizierten Quadrat von (9).

Damit hätten wir die Gleichungen der 4 in § 7 gefundenen Flächen abgeleitet und dabei die dortigen Resultate und Hilfssätze von ganz andrer Grundlage aus bestätigt.

§ 11.

Analytische Darstellung des gesamten ∞^8-fachen Systems von Flächen 2. Ordnung in § 8.

Diese analytische Darstellung des ∞^8-fachen Systems von Flächen 2. Ordnung ist offenbar durchgeführt, wenn wir die Bedingungen zwischen den Koeffizienten der Fläche und denen des gegebenen Komplexes aufgefunden haben. Da wir diese Bedingungen für den Fall, daß die Gleichungen auf das Nullvierseit der Fläche bezogen sind, schon kennen,*) so brauchen wir nur noch eine **Transformation der allgemeinen Gleichung einer Fläche 2. Grads auf ihr Nullvierseit des gegebenen Nullsystems** durchzuführen.

Soll **allgemein** die Beziehung einer Fläche 2. Grads:

$$f(xx) = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \tag{11}$$

zu dem gegebenen linearen Komplex

$$\Sigma \beta_{ik} p_{ik} = 0 \tag{12}$$

untersucht werden, so hat man nach den Punkten y_i zu fragen, denen für beide Gebilde dieselbe Polarebene entspricht, so daß 4 Gleichungen von der Form:

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^{4} a_{ik} y_k = \sum_{k=1}^{4} \beta_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4 \tag{13}$$

bestehen müssen. Von Null verschiedene Lösungen für y_k existieren aber nur dann, wenn die Determinante

$$\Delta(\lambda) = | \lambda a_{ik} - \beta_{ik} | = 0$$

ist d. h. es gibt im Allgemeinen 4 Punkte y_k der Fläche, deren Tangentialebenen zugleich ihre Nullebenen sind. Durch Ausrechnen läßt sich wegen $a_{ik} = a_{ki}$ und $\beta_{ik} = -\beta_{ki}$ zeigen, daß diese **biquadratische Gleichung** die Form annimmt:

$$\lambda^4 A + \lambda^2 \Phi_{\beta\beta} + B^2 = 0 , \tag{14}$$

wo A die Determinante der Fläche, $B = \beta_{12}\beta_{34} + \beta_{13}\beta_{42} + \beta_{14}\beta_{23}$ und $\Phi_{\beta\beta}$ der Ausdruck ist, der aus der Gleichung unserer Fläche 2. Grads in Linienkoordinaten:

$$\sum_{i,k}^{1,4} \sum_{h,l}^{1,4} (a_{hi} a_{lk} - a_{hk} a_{li}) p_{ik} p_{hl} = 0$$

*) Satz 26.

dadurch entsteht, daß man p_{ik} durch $\beta_{mn} = \frac{\partial B}{\partial \beta_{ik}}$ ersetzt.*)

[Wenn λ'^2 und λ'^2 die beiden Wurzeln von (14) sind, so ist: $\lambda'^2 \cdot \lambda''^2 = \frac{+B^2}{A}$. Demnach sind für die nichtgradlinigen Flächen ($A < 0$) stets zwei von den 4 Wurzeln reell, hingegen für die gradlinigen alle 4 Wurzeln reell oder alle 4 imaginär. Bestimmt man nun die zu (den) entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehörigen beiden Geraden $A'_1 A'_4$ und $A'_2 A'_3$, so läßt sich zeigen, daß diese stets reell sind und die einzigen Geraden sind, die sowohl im Polarsystem von (11) als auch im Nullsystem von (12) konjugiert sind. Enthält F^2 keine reellen Geraden, so schneidet eine der beiden Geraden stets in 2 reellen Punkten, die andere aber schneidet F^2 nicht; ist F^2 gradlinig, so schneiden entweder beide Geraden in reellen Punkten oder keine von ihnen.**) Im 1. Fall gibt es ein der Fläche und dem Komplex gemeinsames reelles Vierseit, dessen Diagonalen diese beiden, reellen, konjugierten Geraden sind, von dem wir oben ausgegangen waren.]

Führen wir nun die **Transformation** von (11) **auf das Nullvierseit** (14) wirklich aus, so ergibt sich nach einer ausgedehnten Rechnung, wenn wir die Koeffizienten der Gleichung der Fläche in der neuen, kanonischen Form a'_{14} und a'_{23} nennen, daß die Koeffizienten der Gleichung des Komplexes die Form annehmen

(15) $\beta'_{14} = -(\lambda_2 - \lambda_3)\, a'_{14}$; $\beta'_{23} = -(\lambda_1 - \lambda_4)\, a'_{23}$, wenn

$$\lambda_1 = +\sqrt{\frac{-\Phi + \sqrt{\Phi^2 - 4AB^2}}{2A}}; \quad \lambda_2 = +\sqrt{\frac{-\Phi - \sqrt{\Phi^2 - 4AB^2}}{2A}}$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\frac{-\Phi + \sqrt{\Phi^2 - 4AB^2}}{2A}}; \quad \lambda_3 = -\sqrt{\frac{-\Phi - \sqrt{\Phi^2 - 4AB^2}}{2A}}$$

Dasselbe Resultat kann man auch auf eleganterem Weg er-

*) Vergl. Clebsch-Lindemann II_1, S. 348.

**) Diese Realitätsverhältnisse sind dem Manuskript und den Vorlesungen von Prof. F. Schur über proj. Geom. entnommen.

halten, wenn man bedenkt, daß man im Voraus die kanonischen Formen der Gleichung nach der Transformation kennt.*)

32. Satz: Soll nun die Fläche dem ∞^8-fachen System angehören, d. h. ∞^1 kubische Ordnungskurven des gegebenen Komplexes tragen, so muß eine der 4 Bedingungen erfüllt sein:

$$a'_{14}\beta'_{23} - 3a'_{23}\beta'_{14} = 0\,; \quad a'_{14}\beta'_{23} + 3a'_{23}\beta'_{14} = 0\,;$$
$$3a'_{14}\beta'_{23} - a'_{23}\beta'_{14} = 0\,; \quad 3a'_{14}\beta'_{23} + a'_{23}\beta'_{14} = 0\,.$$

Dies gibt: $\lambda_3 + 3\lambda_1 = 0$; $\lambda_3 - 3\lambda_1 = 0$; $3\lambda_3 + \lambda_1 = 0$ und $3\lambda_3 - \lambda_1 = 0$.

Bringt man diese 4 Bedingungen auf ihre **rationale** Form durch Einsetzen der obigen Werte λ_k und Quadrieren, so ergibt sich in allen 4 Fällen **dieselbe in a_{ik} und β_{ik} biquadratische Bedingung**:

III.) $$9\Phi_{\beta\beta}^2 - 100\,A\,B^2 = 0\,.$$

Da die 4 Flächen I des Büschels (4) die einzigen Flächen des Systems waren, so können wir nun auch umgekehrt schließen:

33. Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Fläche 2. Grads unserm 8^3-fachen System angehört, ist die biquadratische Beziehung III.

Setzt man in III alle $a_{ii} = 0$, so zerfällt die Bedingung in das Produkt der 4 bilinearen Bedingungen:

$$a'_{12}\beta'_{34} + 2a'_{13}\beta'_{42} + 3a'_{14}\beta'_{23} + a'_{23}\beta'_{14} - 2a'_{24}\beta'_{13} + a'_{34}\beta'_{12} = 0$$
$$-a'_{12}\beta_{34} - 2a'_{13}\beta'_{42} + a'_{14}\beta'_{23} + 3a'_{23}\beta'_{14} - 2a'_{24}\beta_{13} - a'_{34}\beta'_{12} = 0$$
$$2a'_{12}\beta'_{34} + a'_{13}\beta'_{42} + 3a'_{14}\beta'_{23} - a'_{23}\beta'_{14} + a'_{24}\beta'_{13} + 2a'_{34}\beta'_{12} = 0$$
$$-2a'_{14}\beta'_{34} - a'_{13}\beta'_{42} - a'_{14}\beta'_{23} + 3a'_{23}\beta'_{14} + a'_{24}\beta'_{13} - 2a'_{34}\beta'_{12} = 0$$

wie man durch eine allgemeine Transformation von II und Einsetzen von andrer Seite bestätigen kann.

Die dabei auftretenden charakteristischen **Zahlenwerte** sind genau **dieselben** wie bei den Koordinaten der Tangenten (8) der kubischen Nullkurven I; ihre Summe (absolut genommen) ist gerade gleich der Zahl 10, die in III vorkommt.

Da die Bedingung III in a_{ik} und β_{ik} biquadratisch ist, so folgt unmittelbar:

---

*) Vergl. Clebsch-Lindemann II_1, S. 345 und S. 211.

34. Satz: Jedes Büschel von Flächen 2. Grads enthält 4 Flächen des ∞^8-fachen Systems, d. h. durch 8 beliebige Punkte des Raums, die sich durch eine einzige Raumkurve 4. Ordnung 1. Art verbinden lassen, kann man 4 Flächen hindurchlegen, die je ∞^1 kubische Nullkurven des gegebenen Nullraums tragen.

35. Satz: Umgekehrt kann man, wenn die Fläche 2. Ordnung gegeben ist, in jedem Büschel von linearen Komplexen 4 lineare Komplexe bestimmen, deren zugehörigen ∞^1 projektivischen Schraubenlinien auf der Fläche gerade kubische Ordnungskurven sind.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die ∞^7 **Kegel** in § 4 sich widerspruchslos in das ∞^8-fache System einordnen und III dann aussagt, daß der Kegel von der Nullebene seiner Spitze **berührt** wird.

Kapitel III.

Abbildung der Tangenten der kubischen Nullkurven auf den Punktraum.

§ 12.

Analytische Formulierung der Abbildung eines linearen Komplexes auf den Punktraum.

Zunächst werde hier eine Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum angegeben, deren analytische Formulierung Herr **Prof. F. Schur** in seinem Seminar (W.-S. 1910/1911) vortrug.

Man betrachte alle möglichen **Regelscharen**, die durch 2 Geraden $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ hindurchgehen. Diese beiden Geraden wähle man zu Gegenkanten des Koordinatentetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ und zu Achsen von projektiven Ebenenbüscheln. Deren Gleichungen seien $x_3 - \lambda x_4 = 0$ und $x_1 - \mu x_2 = 0$, die projektive Beziehung sei gegeben durch:

$$\xi_1 \lambda \mu + \xi_2 \lambda + \xi_3 \mu + \xi_4 = 0.$$

Setzt man darin die Werte $\lambda = \frac{x_3}{x_4}$ und $\mu = \frac{x_1}{x_2}$ ein, so erhält man in der Form:

$$\xi_1 x_1 x_3 + \xi_2 x_2 x_3 + \xi_3 x_1 x_4 + \xi_4 x_2 x_4 = 0$$

die Gleichung der gesuchten Regelscharen. Schreibt man sie:

$$x_3 (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) + x_4 (\xi_3 x_1 + \xi_4 x_2) = 0 ,$$

so sieht man sofort, daß diese Regelflächen auch erzeugt werden von den projektiven Büscheln:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \varrho x_4 = 0 \text{ und } \xi_3 x_1 + \xi_4 x_2 - \varrho x_3 = 0.$$

Je nach Wahl der ξ_i bekommt man die ∞^3 Regelflächen. Die Koordinaten jeder Geraden der Regelschar, die also jetzt derselben Schar wie $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ angehören, ergeben sich aus dem Schema:

$$\begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_4 & -\varrho & 0 \\ \xi_1 & \delta_2 & 0 & +\varrho \end{vmatrix} \quad \text{zu:}$$

IV$_a$)
$$\begin{aligned} p_{12} &= \pi_{34} = -\varrho^2 \\ p_{25} &= \pi_{14} = \varrho\ \xi_3 \\ p_{31} &= \pi_{24} = \varrho\ \xi_4 \\ p_{14} &= \pi_{23} = \varrho\ \xi_2 \\ p_{24} &= \pi_{31} = -\varrho \xi_1 \\ p_{34} &= \pi_{12} = \xi_2 \xi_3 - \xi_1 \xi_4 \end{aligned}$$

Ist nun ein beliebiger linearer Komplex gegeben, so hat er mit jeder der Regelscharen 2 Geraden gemein. Man käme so zu einer einzweideutigen Abbildung des Komplexes auf den Punktraum.*) Eineindeutig wird sie aber, wenn die Gerade $A_3 A_4$, durch die ja alle Regelscharen hindurchgehen, ein Komplexstrahl ist, da jede der ∞^3 Regelscharen dann nur noch je 1 der Komplexstrahlen enthält.

Soll daher die obige Gerade p_{ik} dem Komplex:

(16) $$\alpha_{12} p_{12} + \alpha_{23} p_{23} + \alpha_{31} p_{31} + \alpha_{14} p_{14} + \alpha_{24} p_{24} = 0$$

angehören, so muß ϱ denjenigen Wert haben, der sich durch Einsetzen von IV^a) in (16) ergibt:

IV^b) $$-\alpha_{12} \varrho^2 + \varrho (\alpha_{23} \xi_3 + \alpha_{31} \xi_4 + \alpha_{14} \xi_2 + \alpha_{42} \xi_1) = 0 .$$

---

*) R. Sturm I. S. 257, wo auch **weitere Literatur** zu finden ist.

Die Wurzel $\varrho = 0$ ergibt die Gerade $A_3 A_4$, die 2. Wurzel liefert mit IV^a die 2. Schnittgerade des Komplexes mit der zu ξ_i gehörigen Regelfläche.

Deutet man nun $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ als Koordinaten eines Punktes im Raum, so wird durch IV^a und IV^b den Strahlen des Komplexes (16) eindeutig und umkehrbar ein Punkt ξ_i zugeordnet.

Abbildung der einfachsten Gebilde des gegebenen Komplexes.

Was entspricht nun einem Strahlenbüschel des Komplexes? Betrachtet man 2 Gerade des Komplexes, $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = p_{42} : p_{14} : p_{23} : p_{31}$ und $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = q_{42} : q_{14} : q_{23} : q_{31}$, so liefert die Bedingung $\Sigma\, p_{ik}\, q_{lm} = 0$, daß beide sich schneiden:

$$-\varrho_1^{\,2}(\eta_2\eta_3 - \eta_1\eta_4) - \varrho_2^{\,2}(\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4)$$
$$+\varrho_1\varrho_2(\xi_2\eta_3 + \eta_2\xi_3 - \xi_1\eta_4 - \eta_1\xi_4) = 0.$$

Bezeichnet man den Faktor von ϱ in IV^b) mit α_ξ, $\eta_2\eta_3 - \eta_1\eta_4$ mit $f(\eta\eta)$ und $\xi_2\eta_3 + \eta_2\xi_3 - \xi_1\eta_4 - \eta_1\xi_4$ mit $f(\xi\eta)$, so nimmt diese Schnittbedingung die Form an:

$$\alpha_\xi^{\,2} f(\eta\eta) + \alpha_\eta^{\,2} f(\xi\xi) - \alpha_\xi \alpha_\eta f(\xi\eta) = 0. \tag{17}$$

Ist nun der Punkt η_i gegeben, so befinden sich die Punkte ξ_i offenbar auf diesem **Kegel 2. Ordnung** (17), dessen Basis gegeben ist durch:

$$\alpha_\xi = 0 \text{ und } f(\xi\xi) = \xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4 = 0. \tag{18}$$

Dieser Kegelschnitt k^2 geht durch die Schnittpunkte von α_ξ mit $A_3 A_4$, $A_1 A_2$, $A_2 A_4$ und $A_1 A_2$. (Von den 6 Tetraederkanten gehört aber nur $A_3 A_4$ dem Komplex an.) Mittels der Gleichung (17) läßt sich nun zeigen, daß eine Gerade c_{ik}, die einem Punkt $\xi_i = \lambda\xi_i + \eta_i$ einer Mantellinie des Kegels entspricht, sowohl die Identität $\Sigma\, p_{ik}\, c_{lm} = 0$ als auch $\Sigma\, q_{ik}\, c_{lm} = 0$ erfüllt, d. h. c_{ik} schneidet beide Geraden. Da die Gerade c_{ik} aber auch ein Komplexstrahl ist, muß sie dem Büschel (p_{ik}, q_{ik}) angehören. **Jeder Mantellinie des Kegels (17) entspricht also ein Komplexstrahlenbüschel.** Umgekehrt läßt sich auch leicht zeigen, daß eine Gerade des Punktraums $\varrho\, z_i = \lambda\, x_i + y_i$ nur dann das Bild eines Komplexstrahlenbüschels sein kann, wenn sie den Kegelschnitt (18) trifft.

Die Ebene α_ξ dieses Kegelschnitts und dieser selbst spielen bei dieser Abbildung eine besondere Rolle. Da jeder Punkt, für den $\varrho = 0$ also nach IV^b auch $\alpha_\xi = 0$ ist, als Bild des Hauptstrahls $A_3 A_4$ angesehen werden kann, so folgt: **Die Eindeutigkeit der Abbildung wird dadurch gestört, daß den Punkten des Feldes $\alpha_\xi = 0$ immer der Hauptstrahl $A_3 A_4$ entspricht.**

Da ferner dem Schnittpunkt einer Geraden des Punktraums mit dem Hauptkegelschnitt k^2 immer der Strahl des zugehörigen Komplexstrahlenbüschels entspricht, der $A_3 A_4$ trifft, so kann man den Komplexstrahlenbüscheln um $A_3 A_4$, die diese Geraden enthalten, eindeutig die zugehörigen Punkte von k^2 entsprechen lassen.*)

Mittels der zwischen den Linienkoordinaten p_{ik} notwendig bestehenden Identität kann man nun auch über die Abbildung der Grundgebilde des Komplexes (16) rein analytisch den folgenden Satz beweisen: **Einer beliebigen Geraden des Punktraums Σ (die den Hauptkegelschnitt (18) nicht trifft) entspricht eine Komplexregelschar durch den Hauptstrahl $A_3 A_4$, einer beliebigen Komplexregelschar aber entspricht ein Kegelschnitt mit 2 reellen Stützpunkten auf k^2. Jede Fläche 2. Ordnung durch k^2 endlich ist das Bild einer allgemeinen Strahlenkongruenz des Komplexes, während eine Komplexstrahlenkongruenz, die $A_3 A_4$ enthält, sich in eine Ebene (in Gemeinschaft mit α_ξ) abbildet.**

§ 13.

Das Bild einer kubischen Nullkurve (synthetisch).

Wenn wir nun diese Abbildung auf das Tangentensystem einer kubischen Abbildung anwenden wollen, wird es nützlich sein, außer den allgemeinen Eigenschaften desselben**) noch folgenden Hilfssatz vorauszuschicken:

7. Hilfssatz:***) Wenn 4 Tangenten einer kubischen Null-

*) Sturm I. S. 262.

**) Clebsch-Lindemann II_1, S. 247.

***) A. Voss: Math. Ann. 13 S. 232 ff, R. Sturm: Journ. f. Math. 86 S. 116 und Erweiterung bei Sturm I S. 325.

kurve eines Nullraums nur eine Treffgerade haben, so ist diese ein Nullstrahl und umgekehrt. Auf jedem Nullstrahl entsteht durch die 4 Tangenten der gegebenen kubischen Nullkurve, die er trifft, ein äquianharmonischer Punktwurf.

Zu jeder beliebigen Geraden u gibt es nun 4 Tangenten, die u und ihre konjugierte Gerade u′ treffen. Jedes Strahlennetz (u, u′) des gegebenen Komplexes hat daher mit dem Tangentensystem 4 Geraden gemein. Schneidet nun u den Hauptstrahl $A_3 A_4$, so bildet sich die zugehörige Kongruenz in eine Ebene ab, die mit der Abbildung der Tangentenfläche 4 Punkte gemein hat. Dieses Bild ist daher eine Raumkurve 4. Ordnung und wegen der eindeutigen Beziehung der beiden Gebilde wird sie von der 2. Art sein.

Den Tangenten der R^3 entsprechen die Punkte der R_2^4, den Schmiegungsstrahlenbüscheln der R^3 die (Punkte der) Tangenten der R_2^4, die also alle den Hauptkegelschnitt k^2 (der Abbildung) treffen. Dem Strahl eines Schmiegungsstrahlenbüschels, der den Hauptstrahl $A_3 A_4$ trifft, entspricht der Durchstoßpunkt der entsprechenden Tangente der R_2^4 mit k^2. Da aber alle Nullstrahlen in der betreffenden Nullebene des Stützpunktes dieser Geraden auf $A_3 A_4$ sich nach § 12 in denselben Punkt auf k^2 abbilden und dieser Strahlenbüschel noch zwei weitere (2 anderen Schmiegungsstrahlenbüscheln angehörende) Schmiegungsstrahlen der kubischen Nullkurve enthält, so gehen durch jeden Punkt von k^2 3 Tangenten der R_2^4. Die Doppelkurve der Tangentenfläche unserer R_2^4 ist also nicht wie im allgemeinen Fall eine Raumkurve 6. Ordnung, sondern der dreifach zählende Kegelschnitt k^2. Es liegt demnach ein Spezialfall einer R_2^4 vor, den Prof. E. Weyr (vergl. Literaturangabe) näher synthetisch untersucht hat.

36. Satz:*) Durch die in § 12 gegebene Abbildung gehen also die Tangenten einer kubischen Ordnungskurve des Komplexes (16) in eine Raumkurve 4. Ordnung 2. Art über von der speziellen Form, daß ihre Tangenten zu je dreien sich in den Punkten des Hauptkegelschnitts treffen.

---

*) Dieser Satz ist, wie ich nachträglich fand, auch bei R. Sturm III, Anhang, S. 503 ohne Beweis angedeutet.

Die 4 äquianharmonischen Schmiegungsstrahlenbüschel um $A_3\ A_4$, welche die 4 Tangenten der kubischen Nullkurve enthalten, die $A_3\ A_4$ zum einzigen Treffstrahl haben, bilden sich in die Stützpunkte der R_2^4 auf k^2 ab, so daß ihre dortigen Tangenten sie dreipunktig berühren. Denn jede der 4 ausgezeichneten Tangenten hat in jeder der beiden Schmiegungsebenen noch eine unendlich benachbarte Tangente und in der sie enthaltenden Tangentenebenen um $A_3\ A_4$ haben sich in den ausgezeichneten Tangenten 2 der obigen Schmiegungsstrahlen vereinigt. Es bleibt also noch je ein weiterer Schmiegungsstrahl der R^3, dessen zugehöriger Schmiegungsstrahlenbüschel sich in eine Tangente der R_2^4 abbildet, welche diese Kurve in den 4 obigen Stützpunkten mit oskulierenden Tangenten nochmals trifft (ganz in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von E. Weyr). Diese 4 Tangenten gehören zu den dreipunktigen Sekanten*) der einzigen*) Fläche 2. Ordnung, die man durch eine R_2^4 hindurchlegen kann.

37. Satz: Die spezielle Raumkurve 4. Ordnung 2. Art, welche das Bild einer kubischen Nullkurve ist, stützt sich in 4 Punkten auf den Hauptkegelschnitt k^2; von ihnen sind aber im allgemeinen (wenn $A_3\ A_4$ reell) nur 2 reell. In diesen Punkten wird die Kurve von ihrer Tangente oskuliert und zugleich von einer andern Tangente geschnitten. Diese letzteren gehören daher zu den dreipunktigen Sekanten der R_2^4, welche die einzige Fläche 2. Grads erfüllen, die durch die R_2^4 hindurchgelegt werden kann. Die Berührungspunkte von je 3 Tangenten, die sich auf k^2 begegnen, bestimmen die Polarebene dieses Schnittpunktes in bezug auf diese Fläche 2. Grads.

§ 14.

Analytische Darstellung dieses Bildes nach § 12.

Wir gehen aus von der einfachsten Darstellung einer kubischen Raumkurve, wie sie schon Möbius im Baryzentrischen Calcül (§ 132) 1827 gab:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1. \tag{19}$$

*) Cremona, Annali di Matematica 1861, IV, S. 71.

Ihre Tangenten haben die Koordinaten:

(20) $p_{12} : p_{23} : p_{13} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \lambda^4 : \lambda^2 : 2\lambda^3 : 2\lambda^2 : 2\lambda : 1.$

Sie ist daher **Ordnungskurve** des linearen Komplexes*): $p_{14} - 3p_{23} = 0$.

Die Abbildung in § 12 nimmt aber nur dann die einfache Form IV an, wenn nur die Kante $A'_3\,A'_4$ des Koordinatentetraeders dem Komplex angehört.

Wir **transformieren** daher die obigen Gleichungen auf ein solches Tetraeder durch die Formeln:

$$\mu x_i = a_{i1}\,x_1' + a_{i2}\,x_2' + a_{i3}\,x_3' + a_{i4}\,x_4' \qquad (i = 1, 2, 3, 4$$

und erhalten als Gleichung des Komplexes:

$$\sum_{i,k}^{1,4} p'_{ik} \cdot [b_{14}^{(ik)} - 3b_{23}^{(ik)}] = 0, \text{ wo } b_{sn}^{(ik)} = a_{si}\,a_{nk} - a_{ki}\,a_{sk}$$

die Linienkoordinaten der Kante $A'_i A'_k$ des neuen Koordinatentetraeders bezogen auf das alte sind, so daß $b_{14}^{(34)} - 3b_{23}^{(34)} = 0$ ist. Die neuen Linienkoordinaten setzen sich aus den alten in der Form zusammen:

(21) $$\tau' p'_{ik} = b_{34}^{(ik)}\,p_{12} + b_{42}^{(ik)}\,p_{13} + b_{23}^{(ih)}\,p_{14} + b_{14}^{(ih)}\,p_{23} + b_{13}^{(ik)}\,p_{42} + b_{12}^{(ik)}\,p_{34}.$$

38. Satz: Setzen wir in (21) für p_{ik} die Werte in λ aus (20) ein, so folgt, da die Abbildung IV $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = p'_{42} : p'_{14} : p'_{23} : p'_{31}$ ergibt, als Gleichung des Bildes der Tangenten unserer kubischen Nullkurve:

V.)
$$\begin{aligned}
\varrho\xi_1 &= b_{34}^{(42)}\lambda^4 + 2b_{42}^{(42)}\lambda^3 + 3b_{23}^{(42)}\lambda^2 + b_{12}^{(42)} + 2b_{31}^{(42)}\lambda + b_{14}^{(42)}\lambda^2 \\
\varrho\xi_2 &= b_{34}^{(14)}\lambda^4 + 2b_{42}^{(14)}\lambda^3 + 3b_{23}^{(14)}\lambda^2 + b_{12}^{(14)} + 2b_{31}^{(14)}\lambda + b_{14}^{(14)}\lambda^2 \\
\varrho\xi_3 &= b_{34}^{(23)}\lambda^4 + 2b_{42}^{(23)}\lambda^3 + 3b_{23}^{(23)}\lambda^2 + b_{12}^{(23)} + 2b_{31}^{(23)}\lambda + b_{14}^{(23)}\lambda^2 \\
\varrho\xi_4 &= b_{34}^{(31)}\lambda^4 + 2b_{42}^{(31)}\lambda^3 + 3b_{23}^{(31)}\lambda^2 + b_{12}^{(31)} + 2b_{31}^{(31)}\lambda + b_{14}^{(31)}\lambda^2
\end{aligned}$$

wobei also für die Koeffizienten $b_{sn}^{(ik)}$ notwendig, da sie die Linienkoordinaten der Kanten $A'_i\,A'_k$ des neuen Tetraeders sind, 4 Identitäten

22a) $b_{34}^{(ik)}\,b_{12}^{(ik)} + b_{13}^{(ik)}\,b_{42}^{(ik)} + b_{14}^{(ik)}\,b_{23}^{(ik)} = 0 \quad (ik = 42, 14, 23, 31)$

und die 4 Schnittbedingungen

---

*) Vergl. auch Clebsch-Lindemann II_1 S. 242 u. 246.

$22^b)$ $b_{34}^{(42)} b_{11}^{(14)} + b_{42}^{(42)} b_{13}^{(14)} + b_{23}^{(42)} b_{14}^{(14)} + b_{14}^{(42)} b_{23}^{(14)} + b_{13}^{(42)} b_{42}^{(14)} +$
$+ b_{12}^{(22)} b_{34}^{(14)} = 0$ etc.

bestehen müssen.

Das Bestehen dieser Bedingungen 22 für die Koeffizienten bewirkt aber, daß die Kurve **keine allgemeine rationale Raumkurve** 4. Ordnung ist, sondern eine spezielle R_2^4, so daß die Schnittpunkte x_i der Tangenten von V. mit der Hauptebene $a_\xi = 0$ der Abbildung gerade auf dem Hauptkegelschnitt (18) liegen.

Die biquadratische Gleichung in λ, die für den **Schnitt der Bildkurve V. mit der Hauptebene** $a_\xi = 0$ sich ergibt, hat im Allgemeinen nur 2 reelle Wurzeln. Genau **dieselbe** Gleichung in λ erhält man, wenn man nach der von A. Voß*) angegebenen Methode diejenigen 4 Tangenten der kubischen Nullkurve sucht, die den Hauptstrahl $A'_3 A'_4$ treffen. Sie ist schließlich auch noch **identisch** mit der Gleichung, die sich ergibt, wenn man nach dem von E. Weyr**) angegebenen allgemeinen Verfahren die 4 Punkte von V mit stationären Schmiegungsebenen sucht.

Damit wären die Sätze 36 und 37 auch analytisch bewiesen und zugleich die Gleichungen einer solchen speziellen R_2^4 aufgestellt.

Die **Gleichung der einzigen Fläche 2. Grads durch unsere Kurve V.** läßt sich nun auch nach der allgemeinen Methode von Franz Meyer***) analytisch bestimmen.

Gerade der Umstand, daß durch jedes Bild der Tangenten der kubischen Nullkurven unseres Nullraums eine **einzige** Fläche 2. Grads geht, erlaubt uns, nun die Beziehungen der kubischen Nullkurven untereinander durch Übertragung an den ihnen entsprechenden Flächen 2. Grads zu studieren. Es läßt sich zeigen, daß jeder kubischen Nullkurve eineindeutig eine Fläche 2. Grads entspricht. Bei der nähern Charakterisierung des so entstehen-

*) A. Voss, a. a. O.

**) E. Weyr: Wiener Sitzungsberichte vom 16. März 1871.

***) F. Meyer: Apolarität und Rationale Kurven, Tübingen 1883, S. 19 und S. 20.

den ∞^7-fachen speziellen Systems von Flächen 2. Ordnung treten aber wegen der Vieldeutigkeit der Abbildung für die Punkte der Hauptebene $\alpha_\xi = 0$ gewisse Schwierigkeiten entgegen. Ein näheres Eingehen hierauf würde uns zu weit führen, um so mehr, als diese Untersuchungsmethode zu umständlich ist und bis jetzt noch zu keinen neuen Resultaten geführt hat.

Damit hätten wir bis auf eine, ebenfalls komplizierte, Methode von Sophus Lie alle (bisherigen) Möglichkeiten der Untersuchung der kubischen Nullkurven eines Nullraums behandelt. Als wirklich fruchtbar haben sich aber nur die Methoden der beiden ersten Kapitel erwiesen.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich am 1. Februar 1891 in Frankenthal (Rheinpfalz) als ältster Sohn des dortigen städt. Oberlehrers und Komponisten Julius Schmitt. Dreieinhalb Jahre besuchte ich die Volksschule und wurde dann in das Real-Lehrinstitut meiner Vaterstadt aufgenommen. Nach Erlangung der Berechtigung zum Einj.-Freiw. Militärdienst trat ich im August 1906 in die Oberrealschule zu Worms a. Rh. über, wo ich Ostern 1909 die Reifeprüfung mit Auszeichnung bestand. Auf der Universität München, die ich darauf bezog, beschäftigte ich mich 4 Semester lang vornehmlich mit dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften. Von München begab ich mich dann an die Universität in Straßburg i. E., um mich spezieller dem Studium der Mathematik, Physik, angewandten Mathematik und Nationalökonomie zu widmen. Hier fand ich starke Anregungen und Unterstützungen bei den Herrn Professoren Braun, Cohn, Epstein, Knapp, v. Mises, Schur, v. Waltershausen, Weber und Wellstein. Vor allem aber bin ich verpflichtet Herrn Professor F. Schur für sein warmes Interesse und seine Ratschläge bei Anfertigung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.